

S2S - Maths - Devoir de vacances - été 2026.

I) Signe du trinôme du second degré.

I Soit $E = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 8x + 15}$

1° Simplifier E .

2° Résoudre $E > 0$.

II 1° Étudier le signe de $A(x) = -x^2 + 2x - m^2 - 2$, où m est un paramètre réel.

2° Étudier le signe de $B(x) = (x + 3)(4 - x)$.

3° Résoudre $\frac{A}{B} \leq 0$.

III Soit l'équation du second degré en x : $4mx^2 + 4(m - 2)x + 4m - 3 = 0$ où m est un paramètre réel, x_1 et x_2 les racines quand elles existent.

1° Calculer m pour que les racines x_1 et x_2 existent.

2° Calculer m pour que x_1 et x_2 , quand elles existent, vérifient la relation $x_1^2 + x_2^2 = 3x_1x_2$.

3° Calculer m pour que les racines soient distinctes et positives.

4° Calculer m pour que $\sqrt{4mx^2 + 4(m - 2)x + 4m - 3}$ soit définie pour tout x réel.

II) Limites – continuité – Dérivabilité

I f est la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 27}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ k & \text{si } x = 3 \end{cases}$.

Calculer k pour que f soit continue au point 3 .

II Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 + x| + (x + 1)^2}{x + 1} & \text{si } x \neq -1 \\ L & \text{si } x = -1 \end{cases}$

Peut-on calculer L pour que f soit continue en -1 ?

III Soit la fonction f définie par $f(x) = x^4 + 2(m - 1)x^2 + 2(m - 1)$ où m est un paramètre réel. Soit (C) la courbe représentant f .

Calculer m pour que (C) admette deux minimums et un maximum.

IV f est la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 6 & \text{pour } x \leq 0 \\ x^3 + x - 6 & \text{pour } x > 0 \end{cases}$

1° Préciser le domaine de définition de f .

2° Étudier la dérivabilité de f en 0.

V Soit f la fonction telle que : $f(x) = \frac{x^2 + mx + 1}{x^2 + x + 1}$ où m est un paramètre réel différent de 1 .

1° Déterminer le domaine de définition de f .

2° Étudier , suivant les valeurs de m , le sens de variation de f .

III) Trigonométrie

I Montrer les identités suivantes (on suppose que les dénominateurs sont différents de zéro).

$$1^{\circ} \frac{2 \sin x \cos x}{1 + \cos^2 x - \sin^2 x} = \tan x .$$

$$2^{\circ} \sin^2 x (10 + \cot^2 x) = 1 + 9 \sin^2 x .$$

$$3^{\circ} \cot y - \tan y = \frac{1 - 2 \sin^2 y}{\sin y \cos y} .$$

II Résoudre chacune des équations trigonométriques dans l'intervalle I indiqué.

$$1^{\circ} \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad I = [-\pi ; \pi] .$$

$$2^{\circ} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos 3x \quad \text{et} \quad I = \mathbb{R} .$$

$$3^{\circ} \sin x \cos 3x = 0 \quad \text{et} \quad I = [0 ; \pi] .$$

III ABC est un triangle, $[CH]$ le segment-hauteur relatif au côté $[AB]$.

On pose $AB = c$, $BC = a$ et $AC = b$.

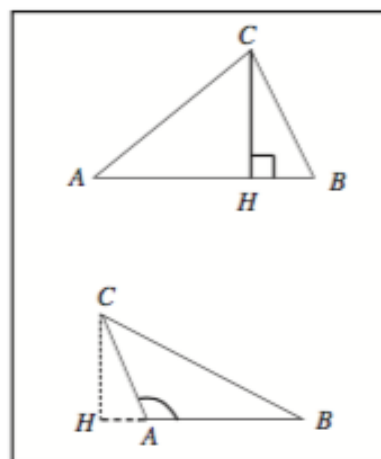
1° Montrer que l'aire du triangle ABC s'exprime par

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} bc \sin A \text{ dans les deux cas où } A \text{ est aigu ou obtus.}$$

2° Montrer que $\mathcal{A}$ peut s'écrire aussi sous la forme

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} ac \sin B \quad \text{et} \quad \mathcal{A} = \frac{1}{2} ab \sin C .$$

$$3^{\circ} \text{ Dédire que : } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{bc}{2\mathcal{A}} .$$



IV Si $a + b = \frac{\pi}{3}$, calculer la valeur numérique de l'expression $E = \frac{\sin a - \sin b}{\cos b - \cos a}$.

VI A , B et C sont les angles d'un triangle quelconque. Démontrer que :

$$1^{\circ} \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$$

$$2^{\circ} \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

$$3^{\circ} 1 - \cos A + \cos B + \cos C = 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} .$$

V

Simplifier les expressions suivantes :

$$1^{\circ} \frac{\sin (a+b)}{\sin a+\sin b}$$

$$2^{\circ} \frac{\sin (a+b)}{\sin a-\sin b}$$

$$3^{\circ} \frac{\sin (a+b)}{\cos a+\cos b}$$

$$4^{\circ} \frac{\sin (a+b)}{\cos a-\cos b}$$

$$5^{\circ} \frac{\sin (a+b)+\sin c}{\sin a+\sin (b+c)}$$

$$6^{\circ} \frac{\sin (a-b)[\tan a+\tan b]}{\sin (a+b)[\tan a-\tan b]}$$

$$7^{\circ} \frac{\tan 2 a+\tan a}{\tan 4 a-\tan a}$$

$$8^{\circ} \frac{\sin x+\sin 3 x+\sin 5 x}{\cos x+\cos 3 x+\cos 5 x} .$$

VII)

$$\text{Soit } E=\cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2 \pi}{9} \cos \frac{3 \pi}{9} \cos \frac{4 \pi}{9} .$$

Calculer $E \times 2 \sin \frac{\pi}{9}$ et déduire la valeur de E .

VIII) 1° Factoriser l'expression $F=\cos x+\cos 2 x+\cos 3 x$.**2°** Résoudre l'équation $F=0$.**3°** Trouver alors les valeurs de x telles que $x \in[-\pi, \pi]$.

IX) Résoudre les équations suivantes .

1° $\cos 5x + \cos 3x + \cos x = 0$.

2° $\cos \left(\frac{\pi}{3} + x \right) \sin \left(\frac{\pi}{6} + x \right) = \frac{-\sqrt{3} + 1}{4}$.

3° $3 \tan (x + 3\pi) = 2 \cos \left(\frac{5\pi}{2} - x \right)$.

4° $\frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x} = 2$.

IV) Fonctions polynômes

I) Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2 - 5x + 4$ et soit (P) sa courbe représentative . (D) est la droite d'équation $y = x + m$, où m est un paramètre réel .

1° a) Discuter le nombre de points d'intersection de (P) et (D) , quand m varie .

b) Dans le cas où (P) et (D) ont deux points d'intersection A et B , trouver et construire l'ensemble des points I milieux de $[AB]$, lorsque (D) varie .

c) Calculer la tangente de l'angle β que forment les tangentes en A et B à (P) .

2° Soit (D') la droite de coefficient directeur le réel p et passant par $E(1 ; -1)$.

a) Écrire l'équation de (D') .

b) Discuter le nombre de points d'intersection de (P) et (D') lorsque p varie.

c) Dans le cas où (D') coupe (P) en deux points G et F , trouver et construire l'ensemble des points J milieux de $[GF]$.

3° La parallèle menée de J à $y'Oy$ rencontre (P) en T . Montrer que la tangente en T à (P) est parallèle à (D') .

4° Démontrer qu'il existe un point F tel que (P) soit l'ensemble des points équidistants de F et de la droite (D) d'équation $y = \frac{-5}{2}$.

II) Soit f la fonction définie par : $f(x) = 3x^3 - 4x - 1$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1° a) Déterminer le domaine de définition D_f de f et trouver les limites aux bornes ouvertes de D_f .

b) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f .

c) Tracer (C) .

2° Écrire l'équation de la tangente (T) à (C) en $I(0; -1)$. Tracer (T) .

3° Résoudre l'équation $f(x) = -1$ et vérifier le résultat graphiquement.

4° Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = m$, où m est un paramètre réel.

5° La courbe (C) admet deux tangentes de coefficient directeur 5. Trouver les équations de ces tangentes et les coordonnées de leurs points de contact avec (C) .

III) Soit la fonction f définie par $f(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$.

1° a) Déterminer le domaine de définition D_f de f et trouver les limites aux bornes ouvertes de D_f .

b) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f .

c) Tracer (C) .

2° En déduire la courbe représentative (C') de la fonction g définie par $g(x) = |8x^4 - 8x^2 + 1|$, dans le même repère que (C) .

3° Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre et le signe des racines de l'équation $g(x) = m$.

4° a) Déterminer les points de (C) d'abscisses respectives 1 et $-\frac{1}{2}$.

b) Déterminer alors les points d'intersection de (C) avec la première bissectrice des axes.

V- Fonctions rationnelles

I) Soit la fonction $f_m(x) = \frac{mx^2 - 2x - 7}{x+2}$. On désigne par (C_m) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- 1) Montrer que (C_m) passe par un point fixe F à déterminer.
- 2) Calculer m pour que (C_m) admette 2 extremums.

A partir de cette question on prend $m = 1$. On désigne par $f_1(x) = \frac{x^2 - 2x - 7}{x+2}$ et par (C_1) sa courbe représentative.

- 3) Déterminer les réels a; b et c tel que pour tout $x \neq -2$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$.
- 4) Déterminer le domaine de définition de f_1 , calculer les limites de f_1 sur les bornes de ce domaine, déduire l'équation de l'asymptote verticale.
- 5) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - 4$ est une asymptote à (C_1) et étudier les positions relatives de (C_1) et (D).
- 6) Calculer $f_1'(x)$, dresser le tableau de variation de f_1 , puis tracer (D) et (C_1) dans un repère orthonormé.
- 7) Tracer dans un nouveau repère le graphe de $g(x) = |f_1(x)|$ pour $x \in]-2; +\infty[$
- 8) Soit (D') la droite d'équation $y = h$.
 - a) Calculer h pour que (D') coupe (C_1) en 2 points M et N.
 - b) Trouver les coordonnées de J milieu de [MN] et en déduire le lieu de J.

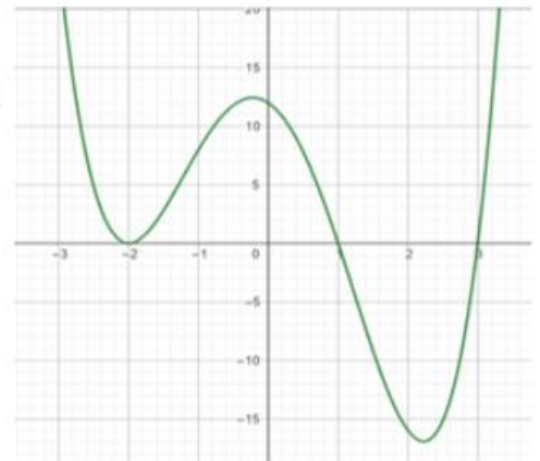
II)

Partie A :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^4 + ax^2 + bx + c$ de courbe (G) ci-contre.

- (G) coupe ($y'y$) en $(0 ; 12)$.
- (G) admet une tangente horizontale en $x = -2$.
- (G) coupe ($x'x$) en 3 points d'abscisses -2 ; 1 et 3.

- 1) Résoudre $g(x) = 0 ; g(x) > 0 ; g(x) < 0$.
- 2) Montrer que $g(x) = x^4 - 9x^2 - 4x + 12$.

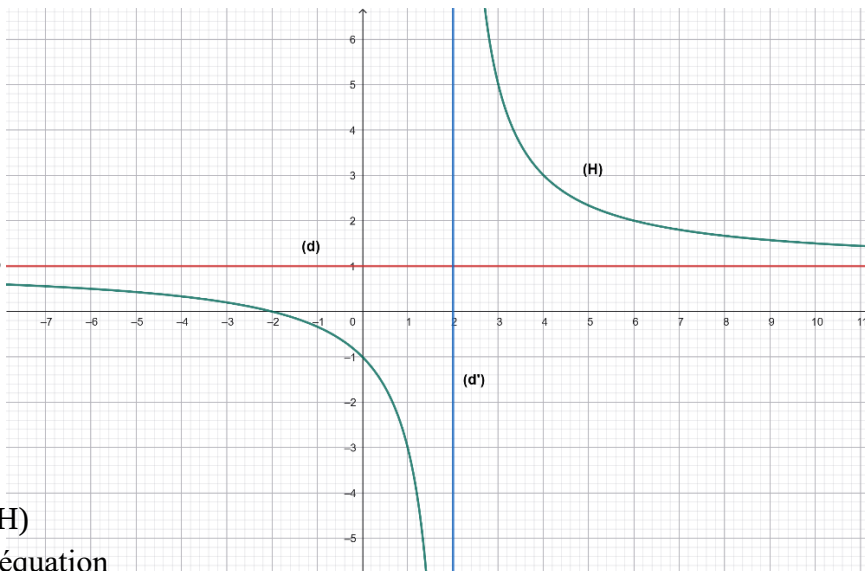


Partie B :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 12x + 4}{x^2 + 1}$ et on note par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
b) Vérifier que $f(x) = x + 2 + \frac{11x+2}{x^2+1}$.
c) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$.
d) Etudier la position de (C) et (D).
- 2) a) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{(x^2+1)^2}$.
b) Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f .
- 3) Tracer (D) et (C).

III) Le graphe ci-contre (H) est celui d'une fonction homographique possédant 2 asymptotes parallèles aux axes (d) et (d') comme indique la figure.



- 1) Déterminer les équations des asymptotes a (H) et les coordonnées du centre de symétrie.
- 2) Sachant que l'équation de (H) est $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$. Utiliser (H) pour calculer a ; b et c.
- 3) Trouver l'équation de la tangente (T) a (H) Au point d'abscisse $x = 0$ puis déduire l'équation De (T') tangente a (H) et parallèle a (T).

Dénombrement et probabilité

- I)**
- 1) De combien de façons différentes 5 garçons et 3 filles peuvent-ils s'asseoir sur un banc ?
 - 2) De combien de façons peuvent-ils s'asseoir si les garçons se placent les uns à côté des autres et s'il en est d même pour les filles ?
 - 3) Sachant qu'il y a 4 garçons et 4 filles dans cette question. De combien de façons peuvent-ils s'asseoir alternativement ?

II) Combien d'anagramme peut-on former par les lettres du mot « alternativement »

III) On lance un dé cubique truqué. Sachant que la chance d'apparition d'un nombre pair est le triple de celle d'un impair. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A « Obtenir un multiple de 3 »

B « Obtenir un diviseur de 6 »

C « Obtenir un multiple de 7 »

IV) Une urne contient 9 boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 9.

- 1) On tire successivement et sans remise 4 boules de cette urne pour former un nombre de 4 chiffres.

Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A « Obtenir un nombre qui commence par 1 »

B « Obtenir un nombre qui commence par 1 et se termine par 7 »

C « Obtenir un nombre qui commence par 1 ou se termine par 7 »

- 2) On tire successivement et avec remise 4 boules. Calculer la probabilité de l'événement

A « Obtenir au moins un 7 »

V) Soit la fonction $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x-1}$ et soit (C) sa courbe représentative.

- 1) Calculer a ; b et c pour que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$.
- 2) Déterminer le domaine de f, calculer les limites et déterminer les équations des asymptotes parallèles aux axes, puis démontrer que (d): $y = ax + b$ est une asymptote oblique à (C).
- 3) Etudier la position de (C) et (d).

- 4) Démontrer que le point I (1 ;4) est un centre de symétrie de (C).
- 5) Calculer $f'(x)$, dresser le tableau de variation et tracer (C) et ses asymptotes.
- 6) Soit (d') : $y = mx + m$. Calculer m pour que (d') coupe (C) en 2 points distincts.

Primitives et intégrales

I) Calculer en écrivant les étapes de calcul chacune des intégrales suivantes :

$$A = \int (3x^2 + 2x - 1)dx. \text{ Avec } A(1) = 2. \quad B = \int_1^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx. \quad C = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \cdot \sin^3 x \cdot dx.$$

$$D = \int_1^2 \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+4}} \cdot dx. \quad E = \int \frac{\tan^2 3x}{\cos^2 3x} \cdot dx.$$

Suites numériques

I) Etudier le sens de variation en utilisant la méthode convenable de chacune des 2 suites suivantes :

$$U_n = \frac{3n}{n+2} \text{ ou } n \in \mathbb{N}. \quad V_n \text{ définie par } \begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = 2V_n - 3 \end{cases} \text{ ou } n \in \mathbb{N}.$$

II) U_n ($n \in \mathbb{N}$) est une suite arithmétique de raison r et $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$. Sachant que $U_2 = 5$ et $U_5 = 11$. Calculer r ; U_0 et S_6 .

III) U_n ($n \in \mathbb{N}^*$) est une suite géométrique de raison $q > 0$ et $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$. Sachant que $U_3 = 16$ et $U_5 = 4$. Calculer q ; U_1 et S_7 .