S2S - Maths - Devoir de vacances - été 2025.

I) Signe du trinôme du second degré.

I Soit $E = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 8x + 15}$

1° Simplifier E .

2° Résoudre $E > 0$.

II **1°** Étudier le signe de $A(x) = -x^2 + 2x - m^2 - 2$, où m est un paramètre réel.

2° Étudier le signe de $B(x) = (x + 3)(4 - x)$.

3° Résoudre $\dfrac{A}{B} \leq 0$.

III Soit l'équation du second degré en x : $4mx^2 + 4(m - 2)x + 4m - 3 = 0$ où m est un paramètre réel, x_1 et x_2 les racines quand elles existent.

1° Calculer m pour que les racines x_1 et x_2 existent.

2° Calculer m pour que x_1 et x_2 , quand elles existent, vérifient la relation $x_1^2 + x_2^2 = 3x_1x_2$.

3° Calculer m pour que les racines soient distinctes et positives.

4° Calculer m pour que $\sqrt{4mx^2 + 4(m - 2)x + 4m - 3}$ soit définie pour tout x réel.

II) Limites – continuité – Dérivabilité

I f est la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 27}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ k & \text{si } x = 3 \end{cases}$.

Calculer k pour que f soit continue au point 3 .

II Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x^2 + x| + (x+1)^2}{x+1} & \text{si } x \neq -1 \\ L & \text{si } x = -1 \end{cases}$

Peut-on calculer L pour que f soit continue en -1 ?

III Soit la fonction f définie par $f(x) = x^4 + 2(m-1)x^2 + 2(m-1)$ où m est un paramètre réel. Soit (C) la courbe représentant f.

Calculer m pour que (C) admette deux minimums et un maximum.

IV f est la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 6 & \text{pour } x \leq 0 \\ x^3 + x - 6 & \text{pour } x > 0 \end{cases}$

1° Préciser le domaine de définition de f.

2° Étudier la dérivabilité de f en 0.

V Soit f la fonction telle que : $f(x) = \dfrac{x^2 + mx + 1}{x^2 + x + 1}$ où m est un paramètre réel différent de 1 .

1° Déterminer le domaine de définition de f.

2° Etudier , suivant les valeurs de m , le sens de variation de f.

III) Trigonométrie

I Montrer les identités suivantes (on suppose que les dénominateurs sont différents de zéro).

1° $\dfrac{2 \sin x \cos x}{1 + \cos^2 x - \sin^2 x} = \tan x$.

2° $\sin^2 x\,(10 + \cot^2 x) = 1 + 9 \sin^2 x$.

3° $\cot y - \tan y = \dfrac{1 - 2 \sin^2 y}{\sin y \cos y}$.

II Résoudre chacune des équations trigonométriques dans l'intervalle I indiqué.

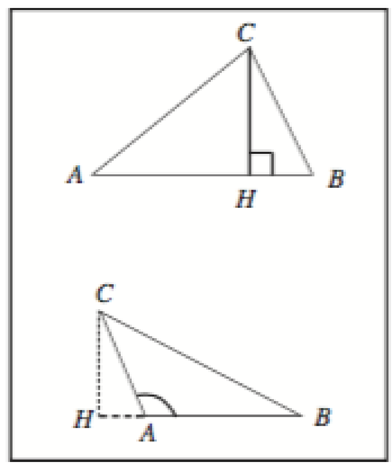
1° $\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$ et $I = [-\pi\,;\,\pi]$.

2° $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos 3x$ et $I = \mathbb{R}$.

3° $\sin x \cos 3x = 0$ et $I = [0\,;\,\pi]$.

III ABC est un triangle, $[CH]$ le segment-hauteur relatif au côté $[AB]$.

On pose $AB = c$, $BC = a$ et $AC = b$.



1° Montrer que l'aire du triangle ABC s'exprime par

$\mathscr{A} = \dfrac{1}{2} bc \sin A$ dans les deux cas où A est aigu ou obtus.

2° Montrer que $\mathscr{A}$ peut s'écrire aussi sous la forme

$\mathscr{A} = \dfrac{1}{2} ac \sin B$ et $\mathscr{A} = \dfrac{1}{2} ab \sin C$.

3° Déduire que : $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{abc}{2\mathscr{A}}$.

IV Si $a + b = \dfrac{\pi}{3}$, calculer la valeur numérique de l'expression $E = \dfrac{\sin a - \sin b}{\cos b - \cos a}$.

VI A , B et C sont les angles d'un triangle quelconque. Démontrer que :

1° $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$

2° $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

3° $1 - \cos A + \cos B + \cos C = 4 \sin\dfrac{A}{2} \cos\dfrac{B}{2} \cos\dfrac{C}{2}$.

V Simplifier les expressions suivantes :

1° $\dfrac{\sin(a+b)}{\sin a + \sin b}$ 2° $\dfrac{\sin(a+b)}{\sin a - \sin b}$

3° $\dfrac{\sin(a+b)}{\cos a + \cos b}$ 4° $\dfrac{\sin(a+b)}{\cos a - \cos b}$

5° $\dfrac{\sin(a+b) + \sin c}{\sin a + \sin(b+c)}$ 6° $\dfrac{\sin(a-b)\,[\tan a + \tan b]}{\sin(a+b)\,[\tan a - \tan b]}$

7° $\dfrac{\tan 2a + \tan a}{\tan 4a - \tan a}$ 8° $\dfrac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x}$.

VII) Soit $E = \cos\dfrac{\pi}{9}\cos\dfrac{2\pi}{9}\cos\dfrac{3\pi}{9}\cos\dfrac{4\pi}{9}$.

Calculer $E \times 2\sin\dfrac{\pi}{9}$ et déduire la valeur de E.

VIII) 1° Factoriser l'expression $F = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$.

2° Résoudre l'équation $F = 0$.

3° Trouver alors les valeurs de x telles que $x \in [-\pi, \pi]$.

IX) Résoudre les équations suivantes .

1° $\cos 5x + \cos 3x + \cos x = 0$.

2° $\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \frac{-\sqrt{3}+1}{4}$.

3° $3 \tan(x + 3\pi) = 2 \cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$.

4° $\frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x} = 2$.

IV) Fonctions polynômes

I) Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2 - 5x + 4$ et soit (P) sa courbe représentative . (D) est la droite d'équation $y = x + m$, où m est un paramètre réel .

1° a) Discuter le nombre de points d'intersection de (P) et (D) , quand m varie .

b) Dans le cas où (P) et (D) ont deux points d'intersection A et B , trouver et construire l'ensemble des points I milieux de$[AB]$, lorsque (D) varie .

c) Calculer la tangente de l'angle β que forment les tangentes en A et B à (P) .

2° Soit (D') la droite de coefficient directeur le réel p et passant par $E(1\,;-1)$.

a) Écrire l'équation de (D') .

b) Discuter le nombre de points d'intersection de (P) et (D') lorsque p varie.

c) Dans le cas où (D') coupe (P) en deux points G et F , trouver et construire l'ensemble des points J milieux de $[GF]$.

3° La parallèle menée de J à $y'Oy$ rencontre (P) en T . Montrer que la tangente en T à (P) est parallèle à (D') .

4° Démontrer qu'il existe un point F tel que (P) soit l'ensemble des points équidistants de F et de la droite (D) d'équation $y = \frac{-5}{2}$.

II) Soit f la fonction définie par : $f(x) = 3x^3 - 4x - 1$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1° **a)** Déterminer le domaine de définition D_f de f et trouver les limites aux bornes ouvertes de D_f .

b) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f .

c) Tracer (C) .

2° Écrire l'équation de la tangente (T) à (C) en $I(0\,;-1)$. Tracer (T) .

3° Résoudre l'équation $f(x) = -1$ et vérifier le résultat graphiquement .

4° Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = m$, où m est un paramètre réel .

5° La courbe (C) admet deux tangentes de coefficient directeur 5 . Trouver les équations de ces tangentes et les coordonnées de leurs points de contact avec (C) .

III) Soit la fonction f définie par $f(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$.

1° **a)** Déterminer le domaine de définition D_f de f et trouver les limites aux bornes ouvertes de D_f .

b) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f .

c) Tracer (C) .

2° En déduire la courbe représentative (C') de la fonction g définie par $g(x) = |\, 8x^4 - 8x^2 + 1 \,|$, dans le même repère que (C) .

3° Discuter graphiquement , suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre et le signe des racines de l'équation $g(x) = m$.

4° **a)** Déterminer les points de (C) d'abscisses respectives 1 et $-\dfrac{1}{2}$.

b) Déterminer alors les points d'intersection de (C) avec la première bissectrice des axes .

V- Fonctions rationnelles

I) Soit la fonction $f_m(x) = \frac{mx^2-2x-7}{x+2}$. On désigne par (C_m) sa courbe représentative dans un repère orthonormé. (5 ¾)

1) Montrer que (C_m) passe par un point fixe F à déterminer.
2) Calculer m pour que (C_m) admette 2 extremums.

A partir de cette question on prend m = 1. On désigne par $f_1(x) = \frac{x^2-2x-7}{x+2}$ et par (C_1) sa courbe représentative.

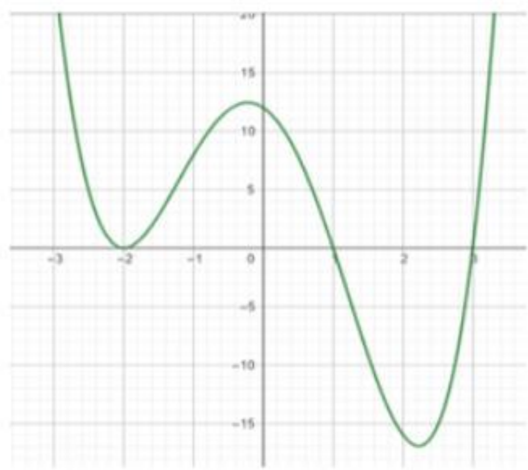
3) Déterminer les réels a; b et c tel que pour tout $x \neq 2$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$.
4) Déterminer le domaine de définition de f_1, calculer les limites de f_1 sur les bornes de ce domaine, déduire l'équation de l'asymptote verticale.
5) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - 4$ est une asymptote a (C_1) et étudier les positions relatives de (C_1) et (D).
6) Calculer $f_1'(x)$, dresser le tableau de variation de f_1, puis tracer (D) et (C_1) dans un repère orthonormé.
7) Tracer dans un nouveau repère le graphe de $g(x) = |f_1(x)|$ pour $x \in]-2; +\infty[$
8) Soit (D') la droite d'équation y = h.
   a) Calculer h pour que (D') coupe (C_1) en 2 points M et N.
   b) Trouver les coordonnées de J milieu de [MN] et en déduire le lieu de J.

II)

Partie A :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^4 + ax^2 + bx + c$ de courbe (G) ci-contre.

- (G) coupe (y'y) en (0 ;12).
- (G) admet une tangente horizontale en x=-2.
- (G) coupe (x'x) en 3 points d'abscisses -2 ; 1 et 3.



1) Résoudre $g(x) = 0$; $g(x) > 0$; $g(x) < 0$.
2) Montrer que $g(x) = x^4 - 9x^2 - 4x + 12$.

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3+2x^2+12x+4}{x^2+1}$ et on note par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   b) Vérifier que $f(x) = x + 2 + \frac{11x+2}{x^2+1}$.
   c) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$.
   d) Etudier la position de (C) et (D).
2) a) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{(x^2+1)^2}$.
   b) Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.
3) Tracer (D) et (C).